Задача 1.

вариант 1

Найти все конечные изолированные особые точки функции

$$f(z) = \frac{\operatorname{ch} z}{(z^2+1)(z-3)}$$

и выяснить их характер. Вычислить вычеты относительно всех найденных особых точек.

вариант 2

Найти все конечные изолированные особые точки функции

$$f(z) = \frac{z}{(z+1)^2(z-2)}$$

и выяснить их характер. Вычислить вычеты относительно всех найденных особых точек.

вариант 3

Найти все конечные изолированные особые точки функции

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{(z^2-1)(z+3)}$$

и выяснить их характер. Вычислить вычеты относительно всех найденных особых точек.

вариант 4

Найти все конечные изолированные особые точки функции

$$f(z) = \frac{\sin(2z)}{(z+i)(z-0.5i)^2}$$

и выяснить их характер. Вычислить вычеты относительно всех найденных особых точек.

вариант 5

Найти все конечные изолированные особые точки функции

$$f(z) = \frac{z^2+1}{(z+2)(z^2+4)}$$

и выяснить их характер. Вычислить вычеты относительно всех найденных особых точек.

Задача 2. Используя основную теорему теории вычетов, вычислить интеграл:

вариант 1

$$\oint\limits_{|z|=2} \frac{\cos(\pi z)}{(z^2 - z)^2}\, dz.$$

вариант 2

$$\oint\limits_{|z|=2} \frac{\operatorname{ch}(iz)}{(z^2 + 1)^2}\, dz.$$

вариант 3

$$\oint\limits_{|z|=2} \frac{e^z}{z^2(z + 1)^2}\, dz.$$

вариант 4

$$\oint\limits_{|z|=2} \frac{\sin(\pi z)}{(z^2 - 1)^2}\, dz.$$

вариант 5

$$\oint\limits_{|z|=2} \frac{e^z}{z^4 + 2z^2 + 1}\, dz.$$

Задача 3. Используя основную теорему теории вычетов, вычислить определенный интеграл:

вариант 1

$$\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{5+3\cos x}\ .$$

вариант 2

$$\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{3+\cos x}\ .$$

вариант 3

$$\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{5-3\cos x}\ .$$

вариант 4

$$\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{2+\cos x}\ .$$

вариант 5

$$\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{5+4\cos x}\ .$$

Задача 4. Используя основную теорему теории вычетов, вычислить несобственный интеграл:

вариант 1

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+4x+13)^2} \ .$$

вариант 2

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+2x+2)^2} \ .$$

вариант 3

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2-6x+13)^2} \ .$$

вариант 4

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2-2x+10)^2} \ .$$

вариант 5

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2-6x+10)^2} \ .$$

Задача 5. Используя основную теорему теории вычетов, вычислить несобственный интеграл:

вариант 1

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos(3x)}{(x^2+1)(x^2+4)}\,dx.$$

вариант 2

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{x\sin(5x)}{(x^2+16)(x^2+36)}\,dx.$$

вариант 3

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos x}{(x^2+4)(x^2+9)}\,dx.$$

вариант 4

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{x\sin(4x)}{(x^2+25)(x^2+36)}\,dx.$$

вариант 5

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos(2x)}{(x^2+1)(x^2+9)}\,dx.$$

Задача 6.

вариант 1

Найти дробно-линейную функцию вида $w = (az+b)/(cz+d)$, отображающую верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} z > 0$ на внутренность единичного круга $|w| < 1$ так, чтобы точки $z_1 = -1$, $z_2 = 0$, $z_3 = 1$ переходили в соответствующие точки $w_1 = 1$, $w_2 = i$, $w_3 = -1$.

вариант 2

Найти дробно-линейную функцию вида $w = (az+b)/(cz+d)$, отображающую внутренность единичного круга $|z| < 1$ на нижнюю полуплоскость $\operatorname{Im} w < 0$ так, чтобы точки $z_1 = 1$, $z_2 = i$, $z_3 = -i$ переходили в соответствующие точки $w_1 = 1$, $w_2 = 0$, $w_3 = -1$.

вариант 3

Найти дробно-линейную функцию вида $w = (az+b)/(cz+d)$, отображающую внутренность единичного круга $|z| < 1$ на верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$ так, чтобы точки $z_1 = -1$, $z_2 = 1$, $z_3 = i$ переходили в соответствующие точки $w_1 = -\infty$, $w_2 = 0$, $w_3 = 1$.

вариант 4

Найти дробно-линейную функцию вида $w = (az+b)/(cz+d)$, отображающую нижнюю полуплоскость $\operatorname{Im} z < 0$ на верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$ так, чтобы точки $z_1 = 1$, $z_2 = 0$, $z_3 = -1$ переходили в соответствующие точки $w_1 = 0$, $w_2 = 1$, $w_3 = +\infty$.

вариант 5

Найти дробно-линейную функцию вида $w = (az+b)/(cz+d)$, отображающую внутренность единичного круга $|z| < 1$ на внутренность единичного круга $|w| < 1$ так, чтобы точки $z_1 = -1$, $z_2 = -i$, $z_3 = 1$ переходили в соответствующие точки $w_1 = 1$, $w_2 = i$, $w_3 = -i$.